

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΝΑΤΟΛΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΑΚΗΣ, 3^η ΠΕΡΙΟΔΟΣ 2017 - 2018
ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: **«Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗ ΖΩΗ ΜΑΣ»** -

«Η ασαφής λογική στην καθημερινότητα»

Βασίλης Παπαδόπουλος
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Τομέας Μαθηματικών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η λογική ασχολείται με δύο έννοιες, την αλήθεια και την απόδειξη. Αυτές οι έννοιες έχουν μελετηθεί ανά τους αιώνες από φιλοσόφους, γλωσσολόγους και μαθηματικούς.

Προφανώς είναι διαφορετικός ο τρόπος προσέγγισης της λογικής μεταξύ των τριών ομάδων επιστημόνων που προαναφέραμε. Έτσι, για παράδειγμα, η διαλεκτική λογική, που ουσιαστικά θεμελιώθηκε από τον Ηράκλειτο, έχει εφαρμογές στην ερμηνεία της φύσης και της ιστορίας αλλά είναι σχεδόν αδύνατο να βρεθεί μια εφαρμογή στα μαθηματικά.

Ο κύριος λόγος για αυτή τη διαφοροποίηση είναι η υφή της λογικής αλλά και ο χώρος εφαρμογής της. Ο σκοπός του παρόντος κειμένου δεν είναι να δώσουμε μία γενική εικόνα της λογικής, αλλά απλά περιοριζόμαστε στην παρουσίαση ενός συγκεκριμένου λογικού συστήματος και των εφαρμογών του στους χώρους των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Κυρίαρχο ρόλο παίζει στην προσέγγιση αυτή η «αντίφαση».

Γιῶργος Σεφέρης
- Ὁμιλία κατὰ τὴν ἀπονομὴ τοῦ Νόμπελ
Λογοτεχνίας στὴ Στοκχόλμη

«Τούτῃ τὴν ὥρᾳ αἰσθάνομαι πὼς εἶμαι ὁ ἴδιος μία ἀντίφασῃ. Ἀλήθεια, ἡ Σουηδικὴ Ἀκαδημία, ἔκρινε πὼς ἡ προσπάθειά μου σὲ μία γλῶσσα περιλάλητῃ ἐπὶ αἰῶνες, ἀλλὰ στὴν παροῦσα μορφὴ τῆς περιορισμένη, ἄξιζε αὐτὴ τὴν ὑψηλὴ διάκριση. Θέλησε νὰ τιμήσῃ τὴ γλῶσσα μου, καὶ νὰ - ἐκφράζω τώρα τὶς εὐχαριστίες μου σὲ ξένη γλῶσσα. Σᾶς παρακαλῶ νὰ μοῦ δώσετε τὴ συγνώμη ποὺ ζητῶ πρῶτα -πρῶτα ἀπὸ τὸν ἑαυτό μου».

Μολονότι οι περισσότεροι επιστήμονες που ασχολούνται με την λογική συμφωνούσαν ότι ένα αντικείμενο μπορεί να έχει ή να μην έχει κάποια ιδιότητα, εντούτοις υπήρχαν επιστήμονες που αμφισβήτησαν έντονα αυτήν την ιδέα. Βλέποντας ότι σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι δυνατό να αποφανθούμε για την αλήθεια ή όχι μιας πρότασης, θεωρήθηκε αναγκαία η εισαγωγή της τρίτιμης λογικής.

Έτσι, η τρίτη τιμή αλήθειας (οι άλλες δύο είναι το αληθές και το ψευδές), που ονομάσθηκε απροσδιόριστη, βρήκε χρήση στον χαρακτηρισμό προτάσεων της μορφής: «Υπάρχει ζωή στον πλανήτη Άρη;». Λόγω του ότι οι μαθηματικοί αρέσκονται στη γενίκευση εννοιών, ο Πολωνός μαθηματικός Lukasiewicz, πατέρας της τρίτιμης Λογικής, εισήγαγε τη Λογική απείρων τιμών αλήθειας.

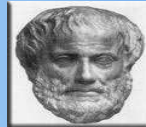
Στη λογική αυτή οι τιμές αλήθειας αναπαριστώνονται από ένα θετικό ακέραιο αριθμό και χαρακτηρίζουν το βαθμό στον οποίο κάποια πρόταση ισχύει ή όχι. Έτσι αν θεωρήσουμε ότι ο αριθμός 5 εκφράζει την αλήθεια μιας πρότασης και ο αριθμός 0 το ψεύδος, τότε αν η αλήθεια της πρότασης «Υπάρχει ζωή στον πλανήτη Άρη;» χαρακτηριστεί με 1, αυτό σημαίνει ότι μάλλον δεν είμαστε και τόσο αισιόδοξοι για το ενδεχόμενο να υπάρχει ζωή στον Άρη. Αν και ο Lukasiewicz παρουσίασε τις ιδέες του στη δεκαετία του 1920, έπρεπε να περάσουν αρκετές ακόμη δεκαετίες μέχρι οι ιδέες του να παρουσιασθούν σε διαφορετική μορφή αυτή τη φορά.

Η σύλληψη της ιδέας της Ασαφούς Λογικής πραγματοποιήθηκε το 1965 απ' τον Lofti Zadeh, καθηγητή του Πανεπιστημίου Berkley της Καλιφόρνιας. Η Ασαφής Λογική αποτελεί μία ισχυρή μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων με πάμπολλες εφαρμογές στους τομείς του Μηχανικού. Η Ασαφής Λογική εκτός των άλλων μας παρέχει απλούς και εντυπωσιακούς τρόπους στην εξαγωγή συμπερασμάτων χρησιμοποιώντας ασαφείς, διαφορούμενες ή ανακριβείς πληροφορίες.²

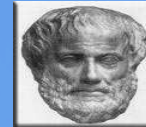
Από μία άποψη η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων με τη βοήθεια της ασαφούς λογικής μοιάζει με το μηχανισμό εξαγωγής συμπερασμάτων του ανθρώπινου συλλογισμού με τη χρήση αβέβαιων και ανακριβών πληροφοριών.

Η Ασαφής Λογική «σχεδιάστηκε» για να εκφράσει από μαθηματική άποψη την αβεβαιότητα και την ασάφεια και να παρέχει τυποποιημένα εργαλεία για να αντιμετωπίσει την εγγενή σε πολλά προβλήματα ανακρίβεια.

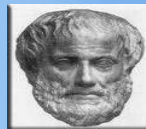
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ



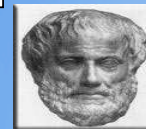
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ



ΒΟΥΔΑΣ

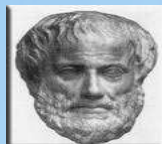


ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ



ΒΟΥΔΑΣ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ



Όλο το οικοδόμημα των Μαθηματικών κτίσθηκε στα θεμέλια που έθεσε ο Αριστοτέλης και πιο συγκεκριμένα στους δύο βασικούς νόμους της ‘αντίφασης’ και του ‘απαιτούμενου τρίτου’.

Η αρχή του απαιτούμενου τρίτου δηλώνει ότι μία πρόταση μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής. Όταν προτάθηκε ο παραπάνω νόμος από τον Παρμενίωνα το 400 π.Χ. υπήρξαν ισχυρές και άμεσες αντιρρήσεις.

Π.χ. ο Ηράκλειτος ισχυρίστηκε ότι μία πρόταση μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθής και μη αληθής. Πάντως ο Πλάτωνας έθεσε τα θεμέλια της ασαφούς λογικής αφού θεώρησε ότι υπήρχε μία τρίτη περιοχή πέρα από το αληθές και ψευδές. Βέβαια πολλοί αμερικάνοι μαθηματικοί-φιλόσοφοι ισχυρίζονται ότι τα θεμέλια της ασαφούς λογικής ετέθησαν από τον Βούδα, ο οποίος ισχυρίστηκε ότι το κακό και το καλό συνυπάρχουν. Αυτό δεν είναι αληθές, καθόσον ο Ηράκλειτος ήταν προγενέστερος του Βούδα.

Η «Λογική του Αριστοτέλη» ή «Λογική του άσπρου-μαύρου» αποτέλεσε το θεμέλιο όλου του οικοδομήματος των Μαθηματικών που κτίστηκε μέχρι σήμερα. Πράγματι, η απόδειξη μιας πρότασης στα Μαθηματικά είναι αληθής ή ψευδής. Δεν νοείται ένα θεώρημα στα Μαθηματικά να είναι αληθές κατά 0.20 ή να είναι αληθές ή ψευδές. Που λοιπόν «υστερεί» η Λογική του Αριστοτέλη, όπου προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε τα φυσικά φαινόμενα χρησιμοποιώντας τη λογική αυτή.

Η περιγραφή των φυσικών νόμων-φαινομένων δε μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας σύνολα με «κοφτά» σύνορα. Π.χ. δε θα ήταν σωστό να χωρίσουμε τις μέρες σε ηλιόλουστες και μη ηλιόλουστες. Μια μέρα με λίγα σύννεφα θα ήταν ηλιόλουστη με έναν μεγάλο βαθμό, ενώ μια μέρα με πιο πολλά σύννεφα μπορεί να είναι πάλι ηλιόλουστη αλλά με μικρότερο βαθμό. Πάντως μια μέρα ηλιόλουστη με καταγάλανο ουρανό θα είναι ηλιόλουστη με βαθμό ένα.

Τα σύνολα που δεν έχουν σαφή όρια είναι αυτά που θα παίζουν βασικό ρόλο στην μελέτη μας και ονομάζονται ασαφή σύνολα. Τα κλασσικά σύνολα είναι αυτά που έχουν σαφή όρια και γνωρίζουμε αν ένα στοιχείο ανήκει ή δεν ανήκει σ' αυτά.

ΚΛΑΣΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει τα κλασσικά σύνολα έχουν σαφή όρια. Ξεκινάμε από ένα σύνολο αναφοράς X . Ένα υποσύνολο A του X ($A \subset X$) είναι ένα σύνολο με στοιχεία του X . Κάθε υποσύνολο A του X μπορεί να περιγραφεί με τους εξής τρόπους:

Με αναγραφή των στοιχείων, δηλαδή να αναγράφουμε όλα τα στοιχεία του A ένα προς ένα.

Με περιγραφή των στοιχείων, δηλαδή να περιγράψουμε το σύνολο A βασιζόμενοι σε ιδιότητες των στοιχείων του.

Ένας άλλος τρόπος παράστασης ενός υποσυνόλου A του συνόλου αναφοράς X είναι με την χαρακτηριστική του συνάρτηση: Σε κάθε υποσύνολο $A \subset X$ αντιστοιχούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του A , $X_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ που ορίζεται ως εξής:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Μπορούμε να «ταυτίσουμε» το υποσύνολο $A \subset X$ με τη χαρακτηριστική του συνάρτηση X_A (όπως λέμε στην «αλγεβρική γλώσσα» υπάρχει ένας ισομορφισμός από το σύνολο των υποσυνόλων του X στο σύνολο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων).

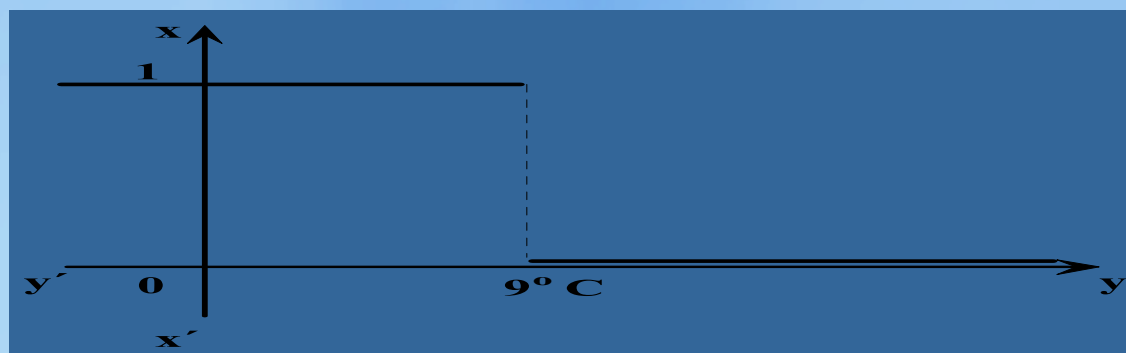
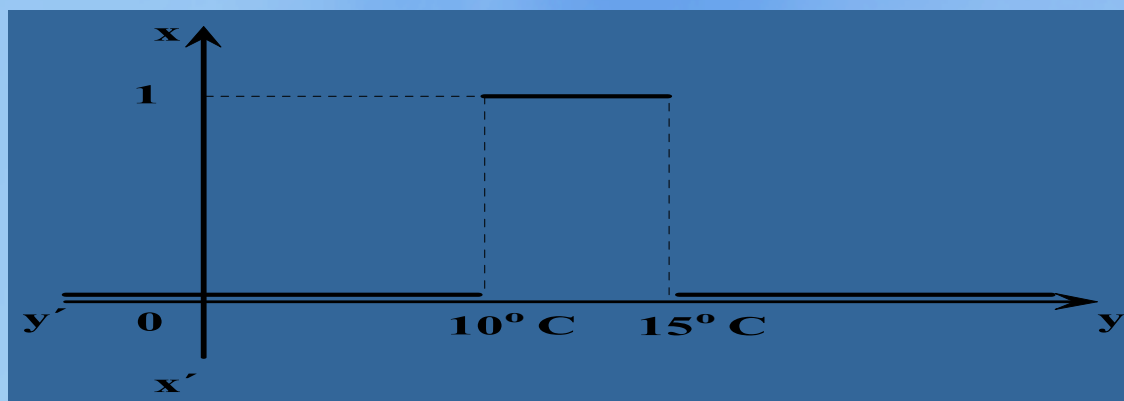
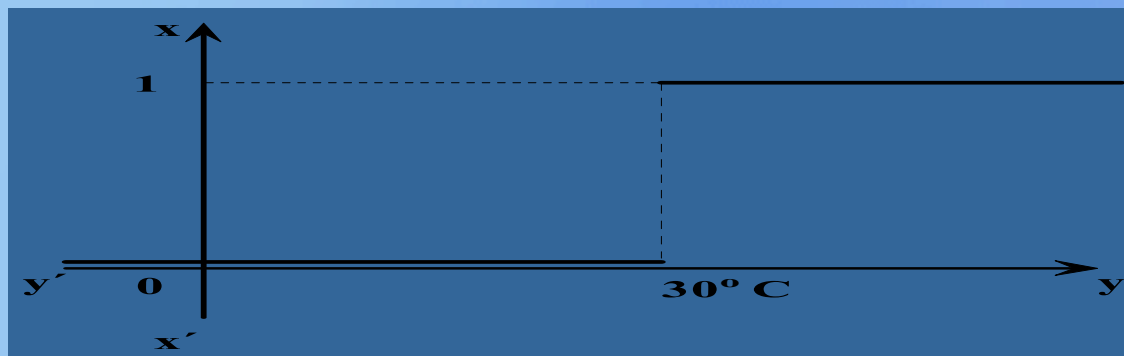
Παραδείγματα

α) Το σύνολο των υψηλών θερμοκρασιών στην Ελλάδα

Πάνω από 30°C θεωρούμε την θερμοκρασία υψηλή και κάτω από 30°C τη θεωρούμε όχι υψηλή! Το παραπάνω σύνολο είναι «κοφτό» (crisp). Είναι δυνατόν η θερμοκρασία των 30°C να θεωρείται υψηλή και η θερμοκρασία των $29,9^\circ\text{C}$ όχι υψηλή.

β) Το σύνολο των μέτριων θερμοκρασιών στην Ελλάδα

γ) Το σύνολο των χαμηλών θερμοκρασιών στην Ελλάδα



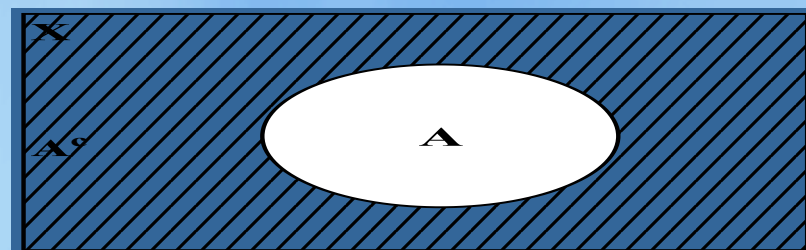
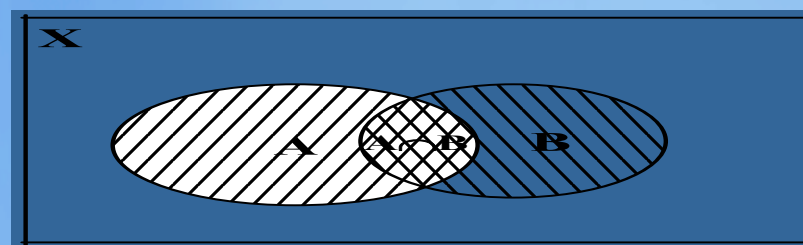
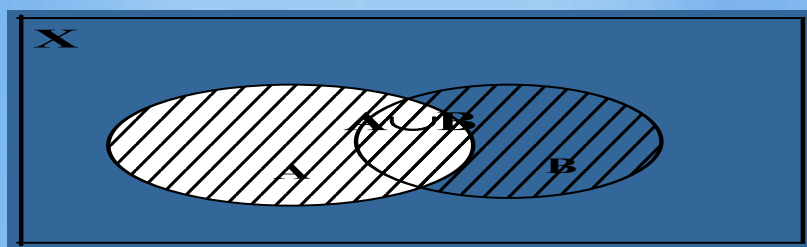
ΠΡΑΞΕΙΣ

Αν $A \subset X$, $B \subset X$ τότε οι βασικές πράξεις των κλασσικών συνόλων είναι:

α) η ένωση $A \cup B = \{x \in X: x \in A \text{ ή } x \in B\}$

β) η τομή $A \cap B = \{x \in X: x \in A \text{ και } x \in B\}$

γ) το συμπλήρωμα $A^C = \{x \in X: x \notin A\}$



Οι παραπάνω πράξεις με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών συναρτήσεων εκφράζονται με βάση την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση : Αν $A \subset X$, $B \subset X$, X_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A , X_B η χαρακτηριστική συνάρτηση του B , $X_{A \cup B}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $A \cup B$, $X_{A \cap B}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $A \cap B$ και X_A^c η χαρακτηριστική συνάρτηση του A^c τότε:

i) $X_{A \cup B}(x) = \max \{X_A(x), X_B(x)\}, x \in X$

ii) $X_{A \cap B}(x) = \min \{X_A(x), X_B(x)\}, x \in X$

iii) $X_A^c(x) = 1 - X_A(x)$

Ιδιότητες των πράξεων κλασσικών συνόλων

Έστω X ένα σύνολο αναφοράς και $A \subset X$, $B \subset X$, $\Gamma \subset X$ Τότε:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup A^c = X \quad (\text{αρχή του αποκλειόμενου τρίτου})$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap A^c = \emptyset \quad (\text{αρχή της αντίφασης})$$

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

Δίνουμε έμφαση στην αρχή της αντίφασης και στην αρχή του αποκλειόμενου τρίτου:

α) Αρχή της αντίφασης $A \cap A^C = \emptyset$ δεν μπορεί ένα στοιχείο να ανήκει στο A και να μην ανήκει σ' αυτό, ή χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των πιθανοτήτων δεν μπορεί κάτι να συμβαίνει και να μην συμβαίνει.

β) Αρχή του αποκλειόμενου τρίτου $A \cup A^C = X$ σημαίνει ότι το τυχόν $x \in X$ ανήκει στο A ή (αποκλειστικά) στο A^C , ή χρησιμοποιώντας τη πιθανοθεωρητική γλώσσα συμβαίνει πάντα ή το A ή το A^C .

Στην περίπτωση των ασαφών συνόλων δεν ισχύουν οι δύο παραπάνω αρχές.

Προτασιακοί τύποι στην κλασσική λογική

Κάθε πρόταση στην κλασσική μαθηματική λογική έχει δύο τιμές αλήθειας 0 ή 1 (ψευδές ή αληθές).

Αν p , q είναι δύο προτάσεις τότε ορίζονται:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	$\sim p$
0	1
1	0

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$ $p \Rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

ΑΠΟ ΤΑ ΚΛΑΣΣΙΚΑ ΣΤΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός ασαφούς συνόλου:

Έστω X ένα κλασσικό σύνολο αναφοράς. Κάθε συνάρτηση $A: X \rightarrow [0, 1]$ λέγεται ασαφές υποσύνολο του X . Εάν $x \in X$, τότε η τιμή $A(x)$ λέγεται τιμή συμμετοχής του x (membership value) και εκφράζει τον «βαθμό» που το x «ανήκει» στο ασαφές σύνολο ή αλλιώς το βαθμό αλήθειας της πρότασης.

Στην βιβλιογραφία πολλές φορές χρησιμοποιείται ο παρακάτω συμβολισμός για τον ορισμό ενός ασαφούς υποσυνόλου ενός συνόλου X :

Ένα ασαφές υποσύνολο A του X θεωρείται η δυάδα (X, μ_A) , όπου $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$.

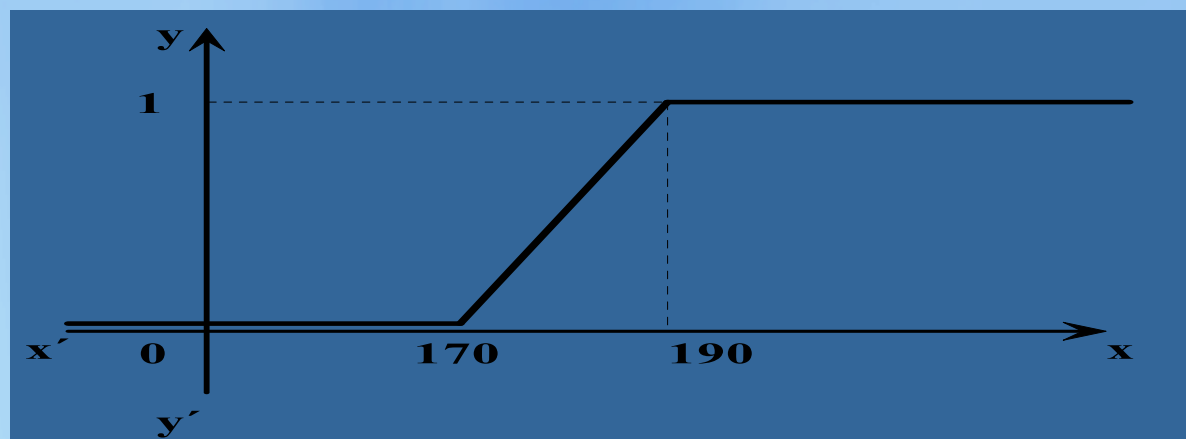
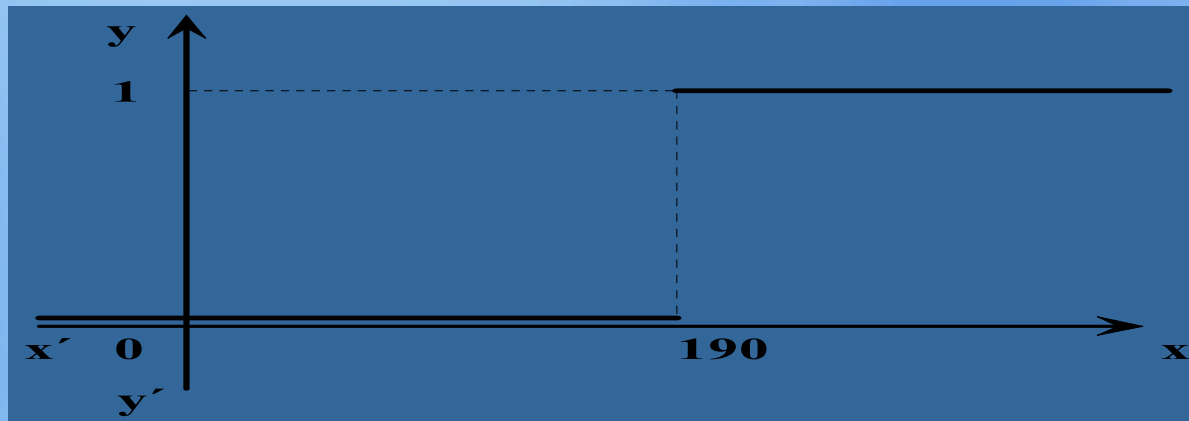
Δηλαδή με τον συμβολισμό αυτό θεωρούμε $A=(X, \mu_A)$ και την συνάρτηση μ_A ονομάζουμε συνάρτηση συμμετοχής (membership function).

Προφανώς κάθε κλασσικό σύνολο είναι ασαφές καθώς καθόσον κάθε κλασσικό σύνολο A «ταυτίζεται» με την χαρακτηριστική συνάρτηση $X_A : X \rightarrow \{0, 1\}$

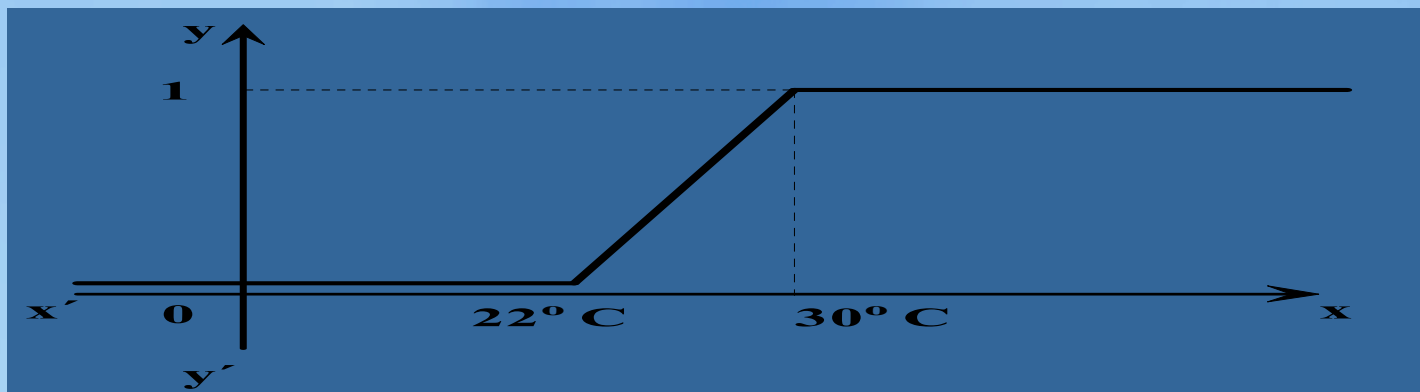
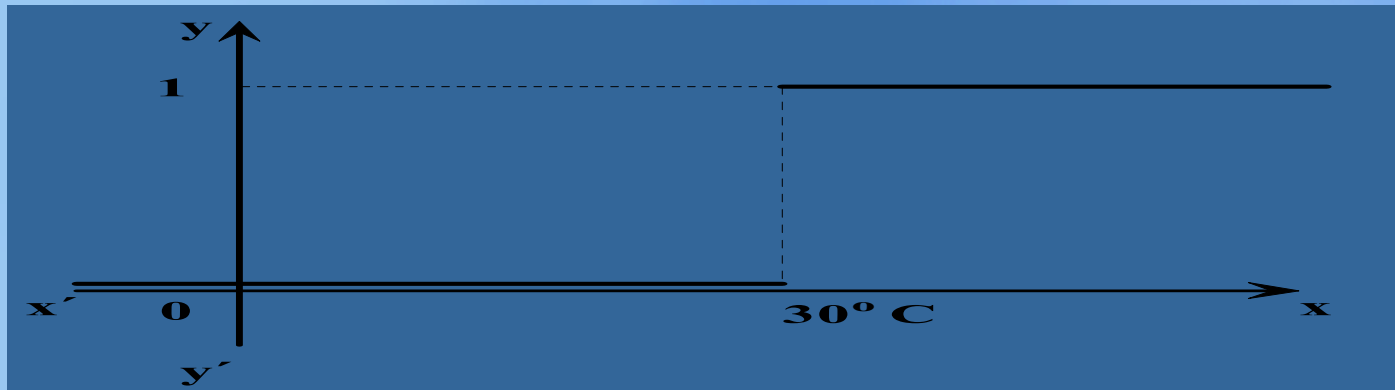
Με τα κλασσικά σύνολα (crisp sets) έχουμε σοβαρά προβλήματα περιγραφής διαφόρων συνόλων και καταστάσεων από την καθημερινή μας ζωή.

Παραδείγματα

1) Θέλουμε να εκφράσουμε το σύνολο των ψηλών ανθρώπων

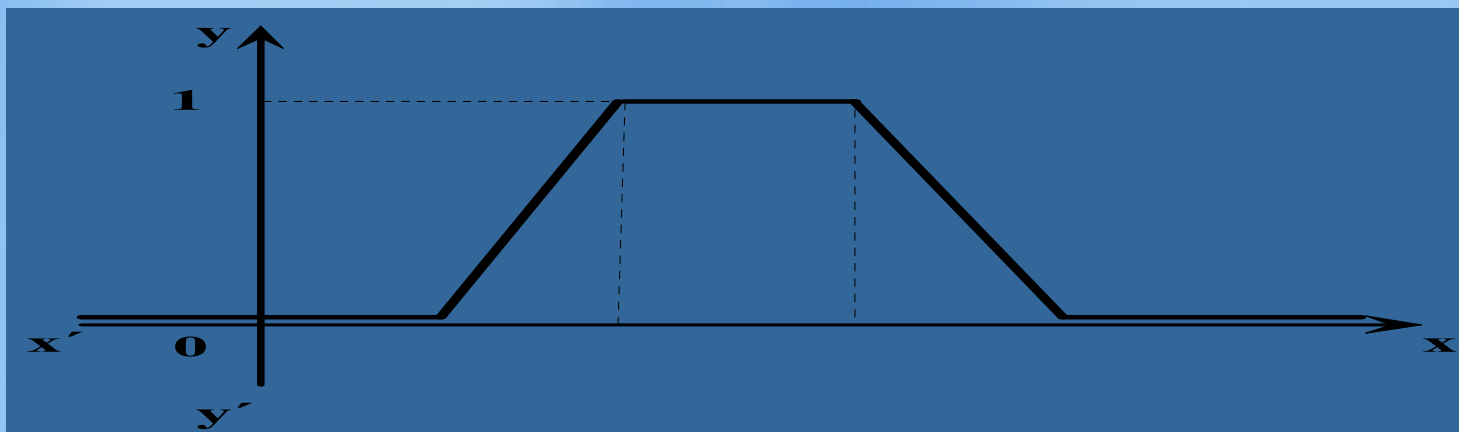
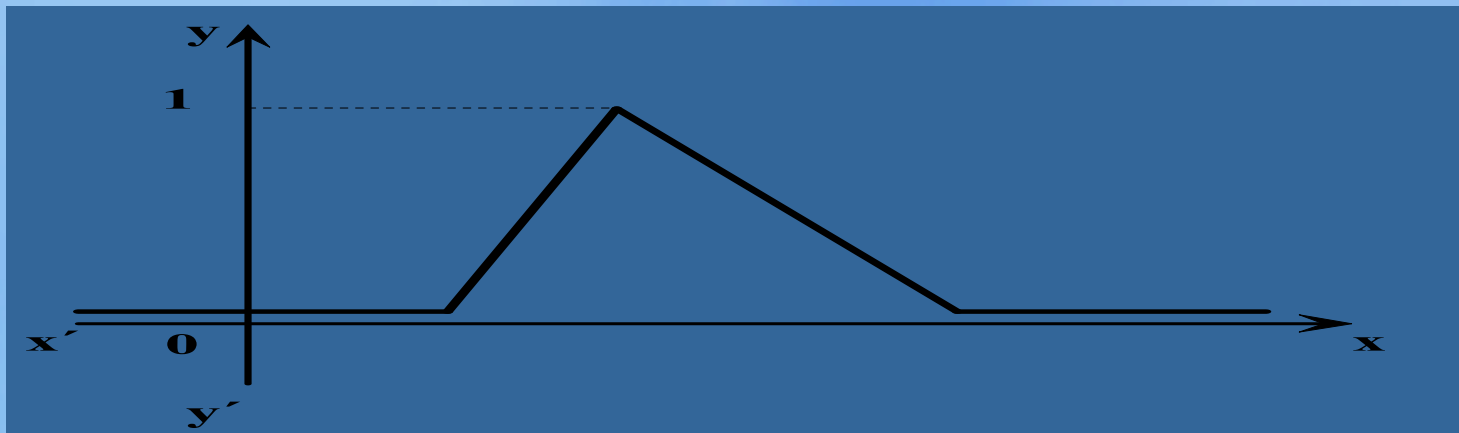


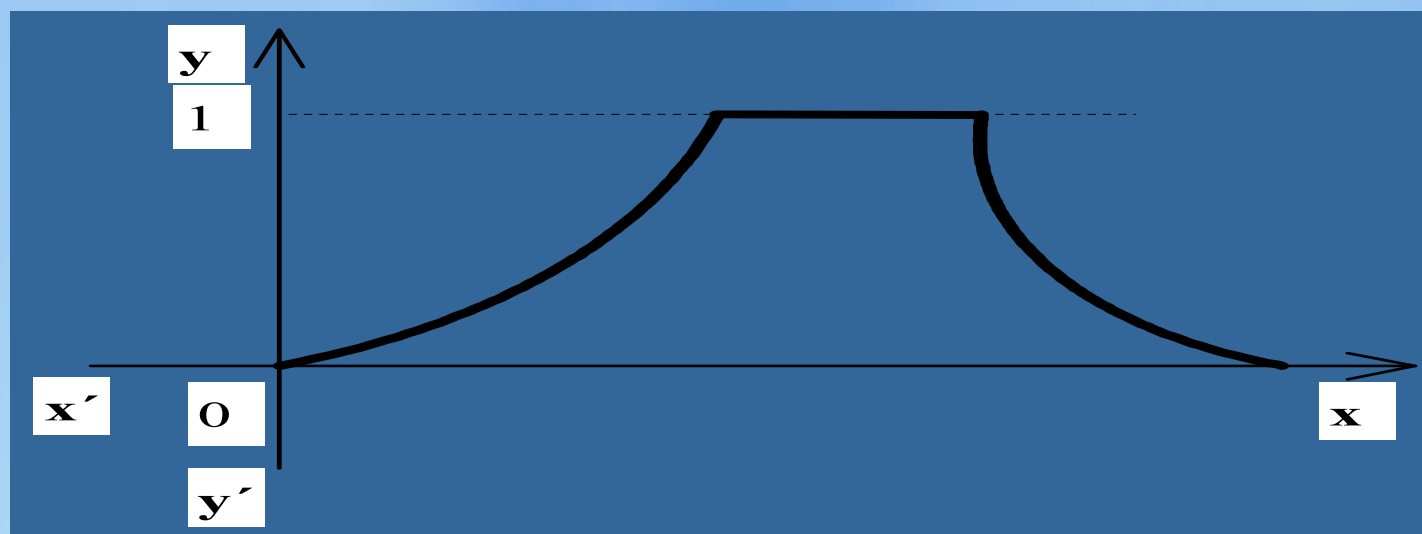
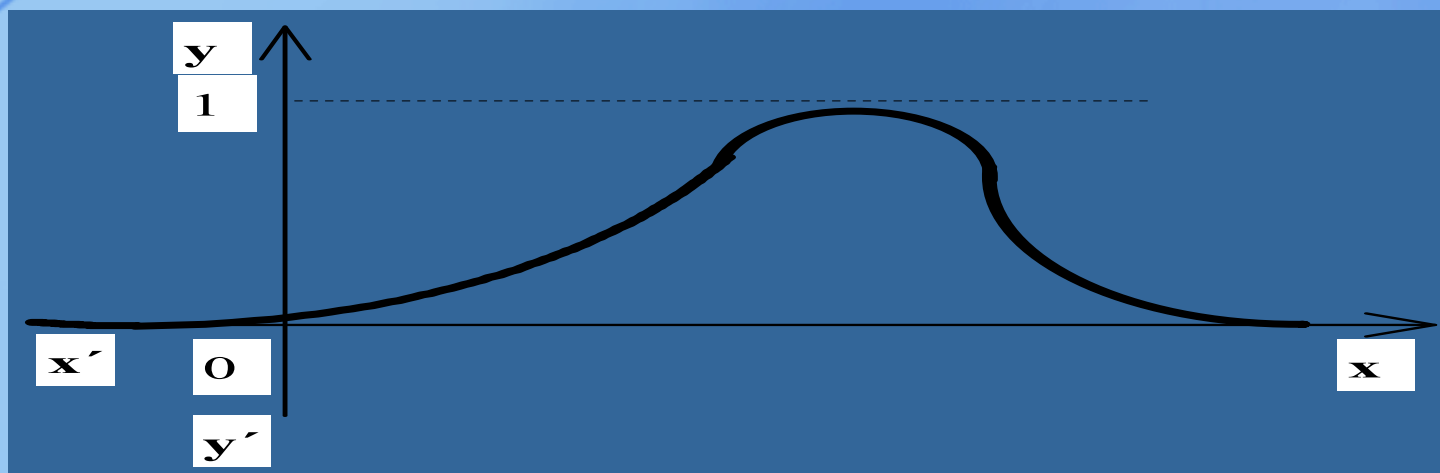
2) Υψηλή θερμοκρασία



Διάφορες μορφές παράστασης ασαφών συνόλων

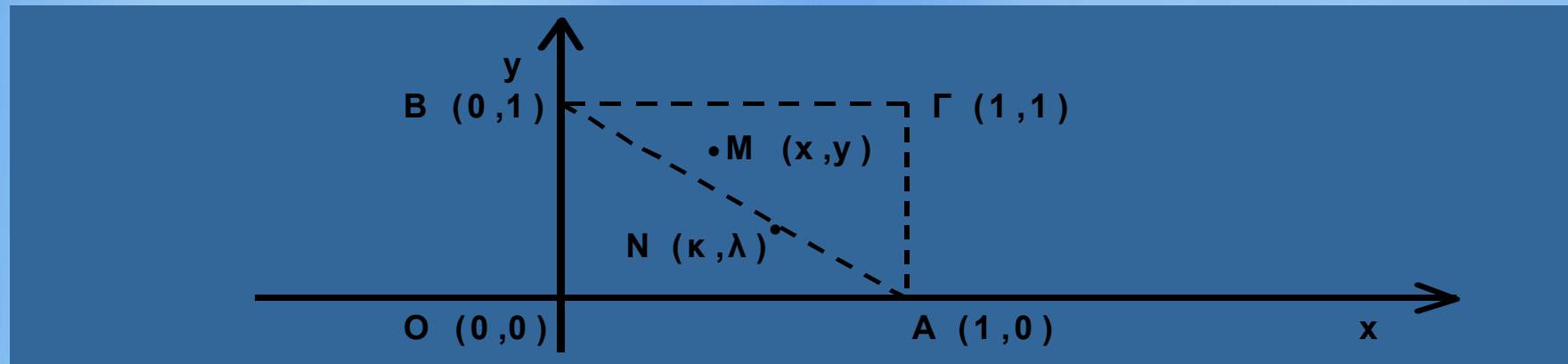
Ένα ασαφές σύνολο μπορεί να έχει τις παρακάτω μορφές:





Τετράγωνο του Kosko

Έστω $X=\{\alpha, \beta\}$ ένα σύνολο αναφοράς. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $O (0,0)$, $A (1,0)$, $B (0,1)$, $\Gamma (1,1)$.



Σε κάθε σημείο $M(x, y)$ του τετραγώνου αντιστοιχούμε ένα ασαφές σύνολο ως εξής:

Θεωρούμε ότι το x δηλώνει τον βαθμό που το α «ανήκει» στο ασαφές σύνολο και ότι το y δηλώνει τον βαθμό που το β «ανήκει» στο ασαφές σύνολο. Έτσι στο σημείο $M(x, y)$ αντιστοιχούμε το ασαφές σύνολο:

$$M: X \rightarrow [0, 1] \text{ με } M(\alpha) = x, M(\beta) = y$$

α) Ποια ασαφή σύνολο αντιστοιχούν στις 4 κορυφές;

Στο $A(1, 0)$ αντιστοιχεί το ασαφές σύνολο:

$A: X \rightarrow [0, 1]$ με $A(\alpha) = 1$, $A(\beta) = 0$, άρα $A = \{\alpha\}$.

Στο $B(0, 1)$ αντιστοιχεί το $\{\beta\}$.

Στο $O(0, 0)$ αντιστοιχεί το $\emptyset$.

Στο $\Gamma(1, 1)$ αντιστοιχεί το $X = \{\alpha, \beta\}$

Άρα στις τέσσερις κορυφές του τετραγώνου αντιστοιχούν τα 4 κλασσικά υποσύνολα του X .

β) Ποια ασαφή σύνολα αντιστοιχούν στην διαγώνιο AB;

Έστω τυχόν σημείο $N(\kappa, \lambda)$ της διαγωνίου AB. Έστω N το ασαφές σύνολο που αντιστοιχεί στο N , δηλαδή:

$$N: X \rightarrow [0, 1] \text{ με } N(\alpha) = \kappa, \quad N(\beta) = \lambda$$

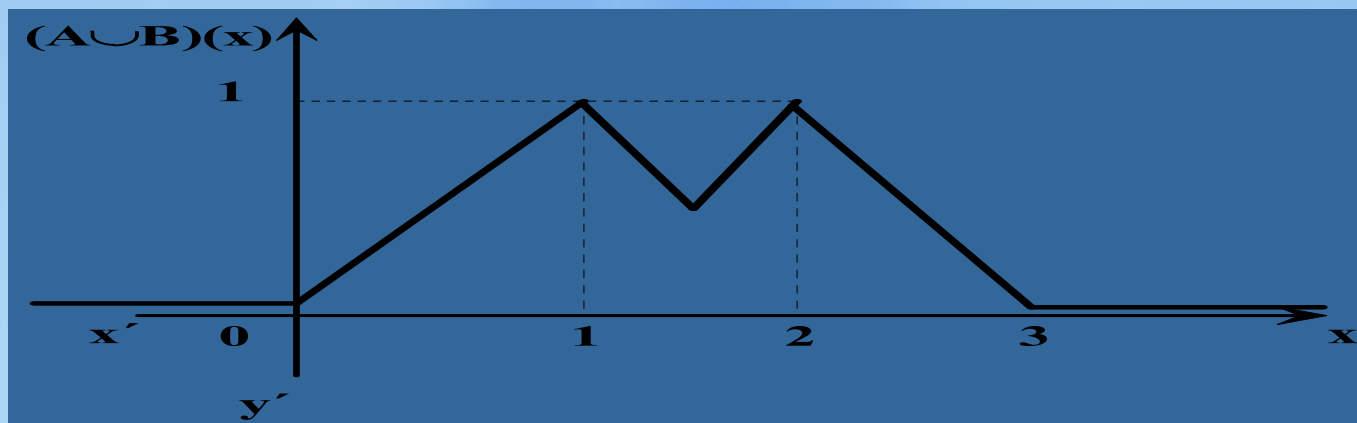
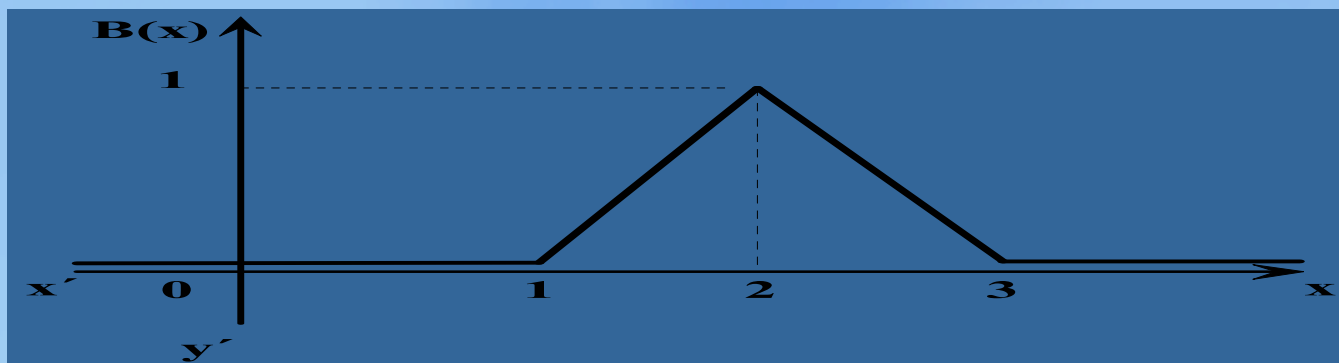
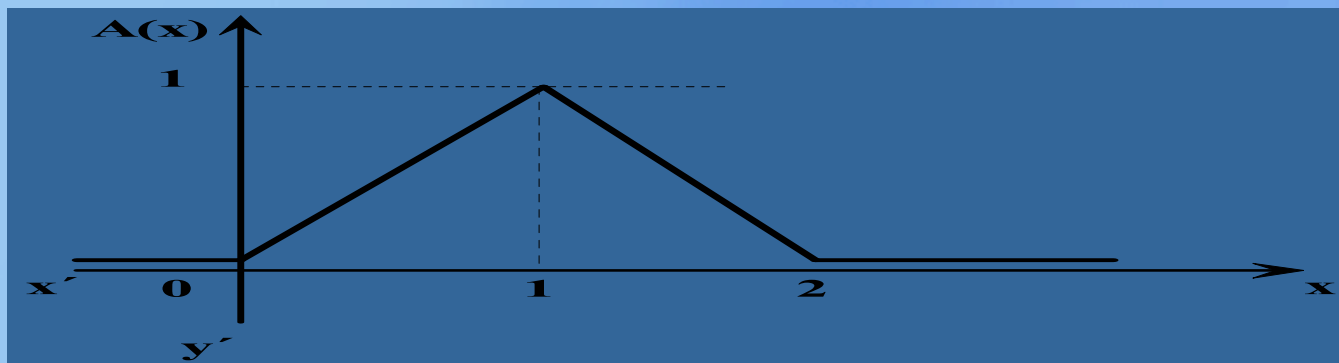
Επειδή όμως $\kappa + \lambda = 1$, παρατηρούμε ότι η N είναι μία συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N , όπου ο $X = \{\alpha, \beta\}$ θεωρείται δειγματικός χώρος.

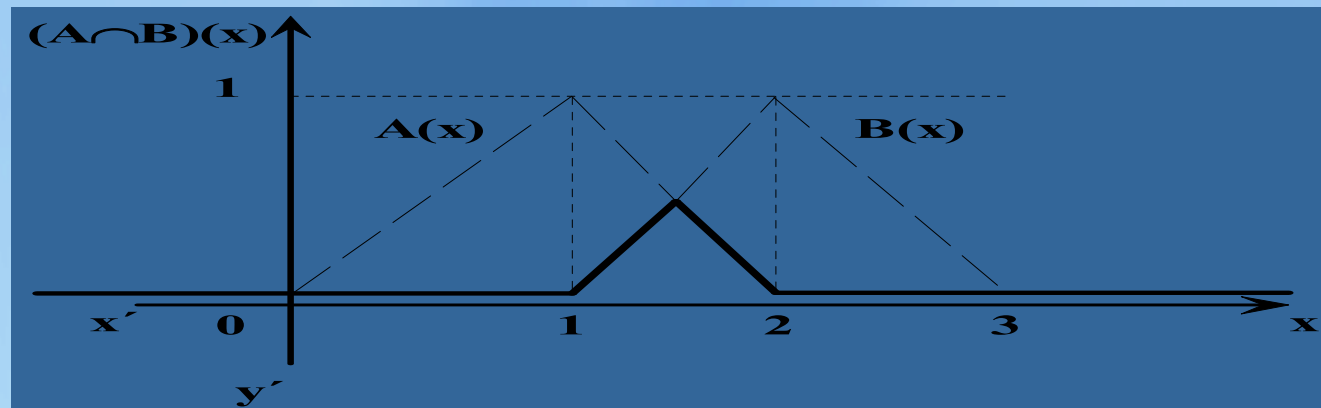
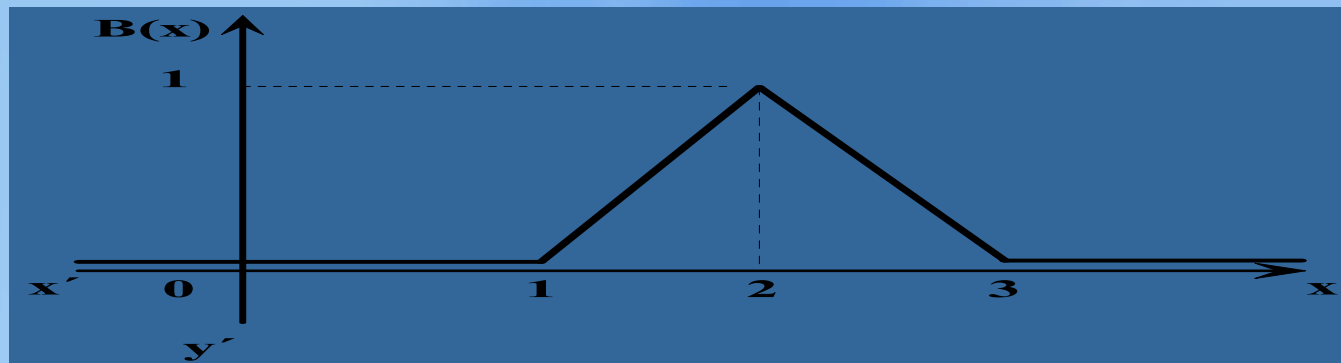
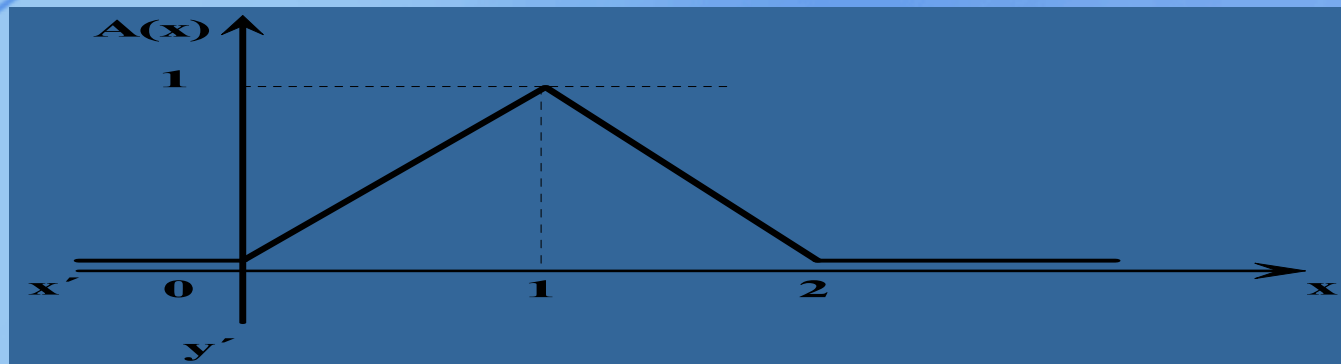
Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι ξεκινώντας από ένα σύνολο αναφοράς $X = \{\alpha, \beta\}$, κατασκευάζουμε τόσα ασαφή σύνολα όσα τα σημεία του τετραγώνου (εσωτερικά και περιμετρικά).

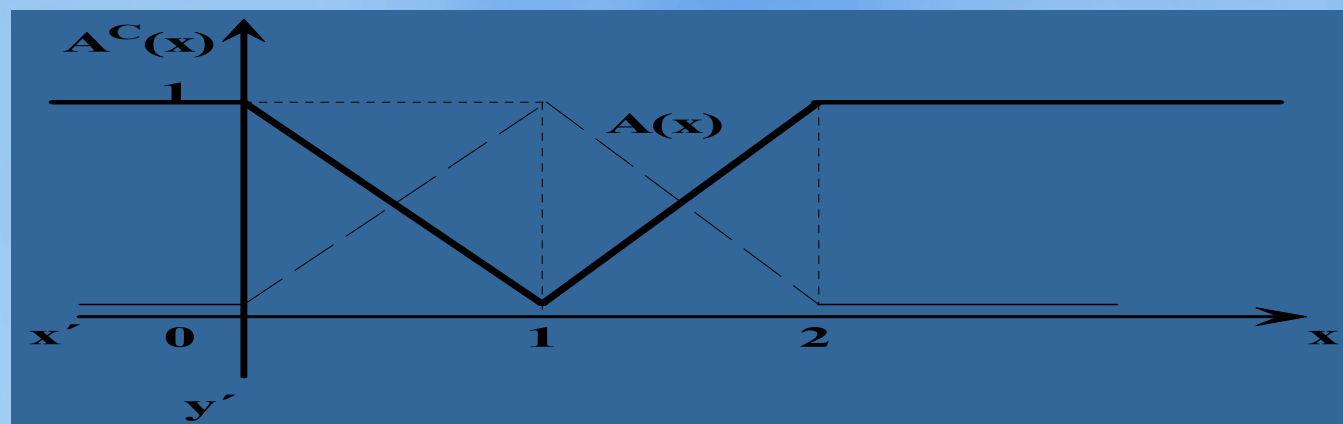
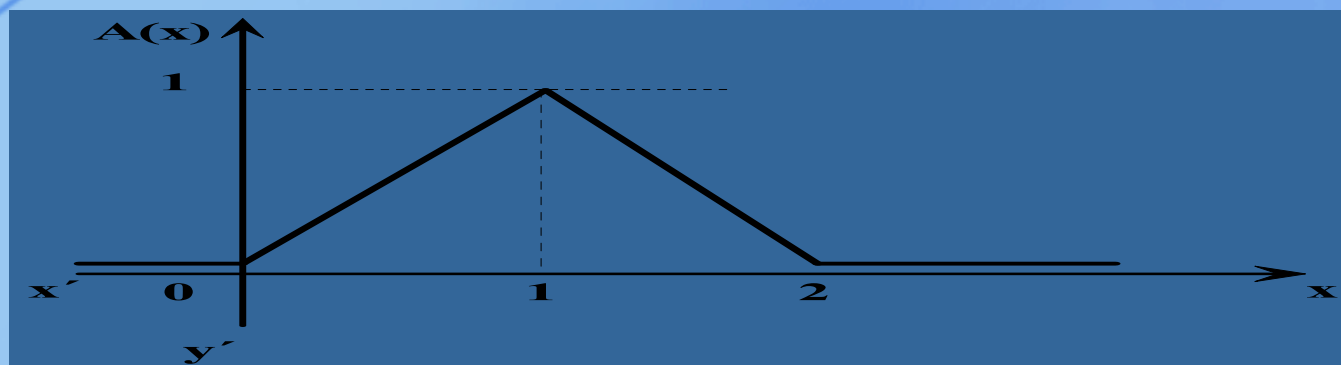
Από αυτά τα ασαφή σύνολα οι τέσσερις κορυφές του τετραγώνου αντιστοιχούν στα 4 κλασσικά υποσύνολα.

Τα ασαφή σύνολα της διαγωνίου AB είναι όλες οι συναρτήσεις πιθανότητας που κατασκευάζονται απ' τον δειγματικό χώρο $X = \{\alpha, \beta\}$.

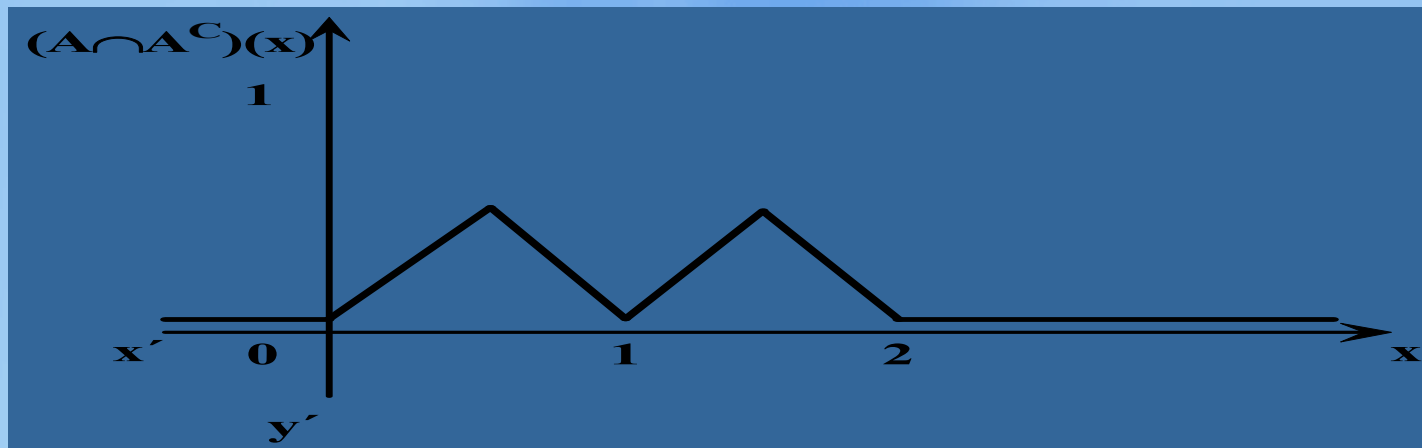
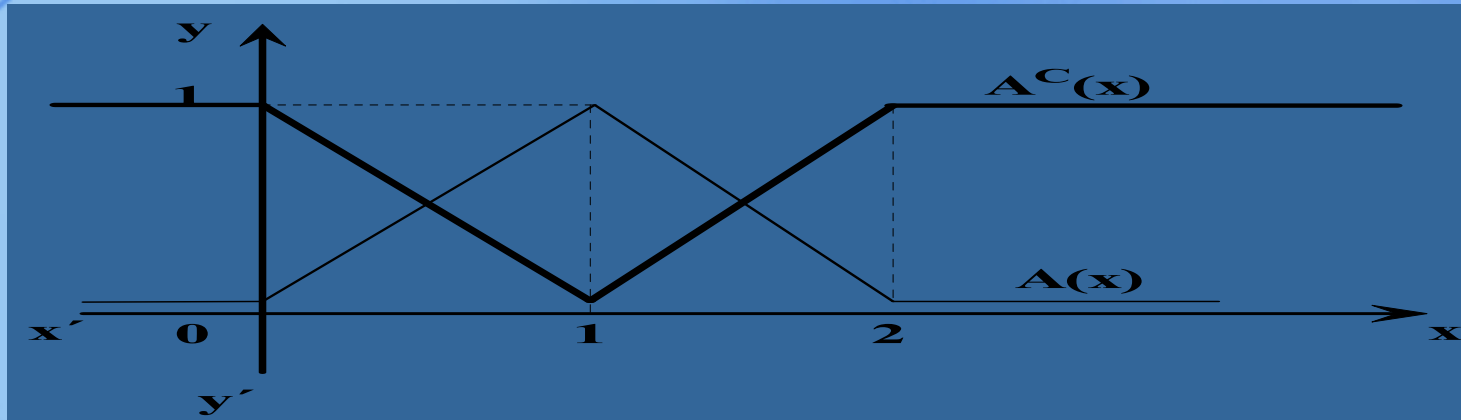
ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ



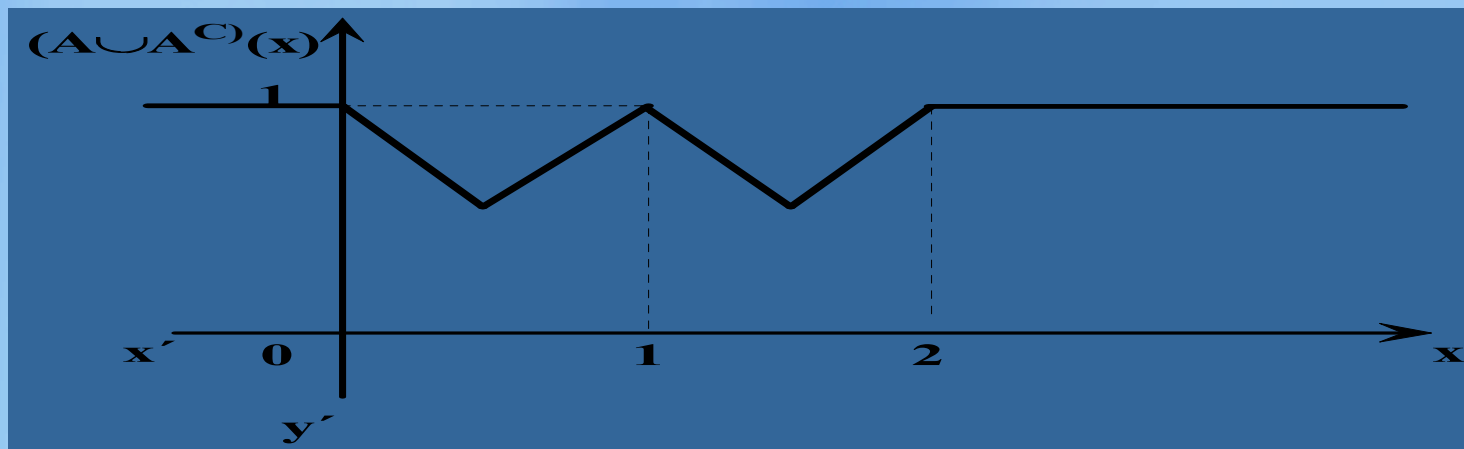
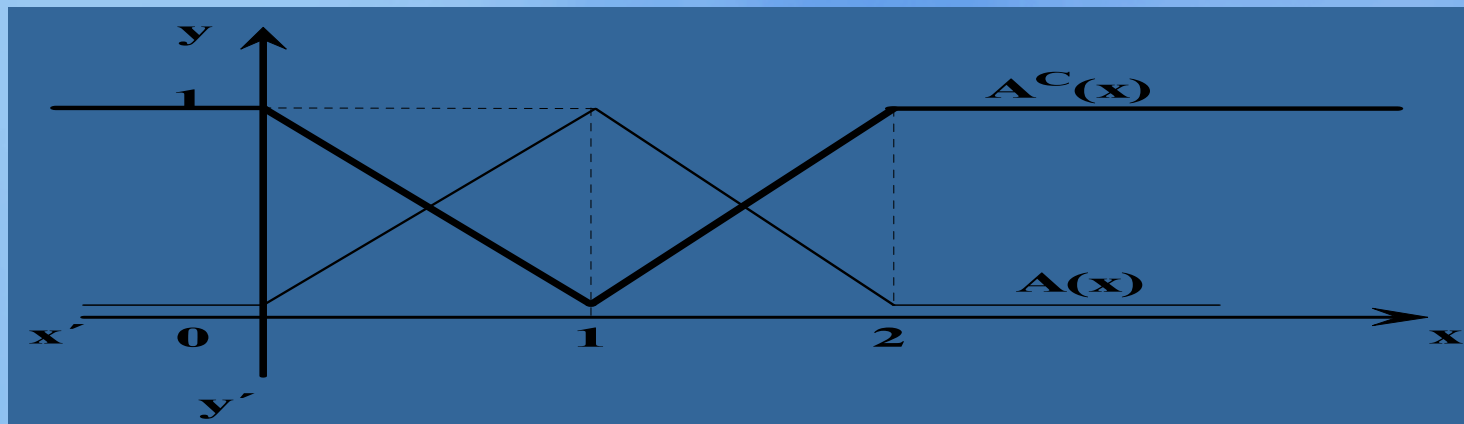




Η αρχή της αντίφασης στα ασαφή σύνολα



Η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου στα ασαφή σύνολα



Τομή και ένωση στο τετράγωνο του Kosko

Έστω $X=\{\alpha, \beta\}$ και A το ασαφές σύνολο $A:X\rightarrow [0, 1]$,
ώστε $A(\alpha) = \kappa$, $A(\beta) = \lambda$. Τότε:

i) A^C είναι το ασαφές σύνολο $A^C: X \rightarrow [0, 1]$, ώστε
 $A^C(\alpha) = 1-\kappa$ $A^C(\beta) = 1-\lambda$

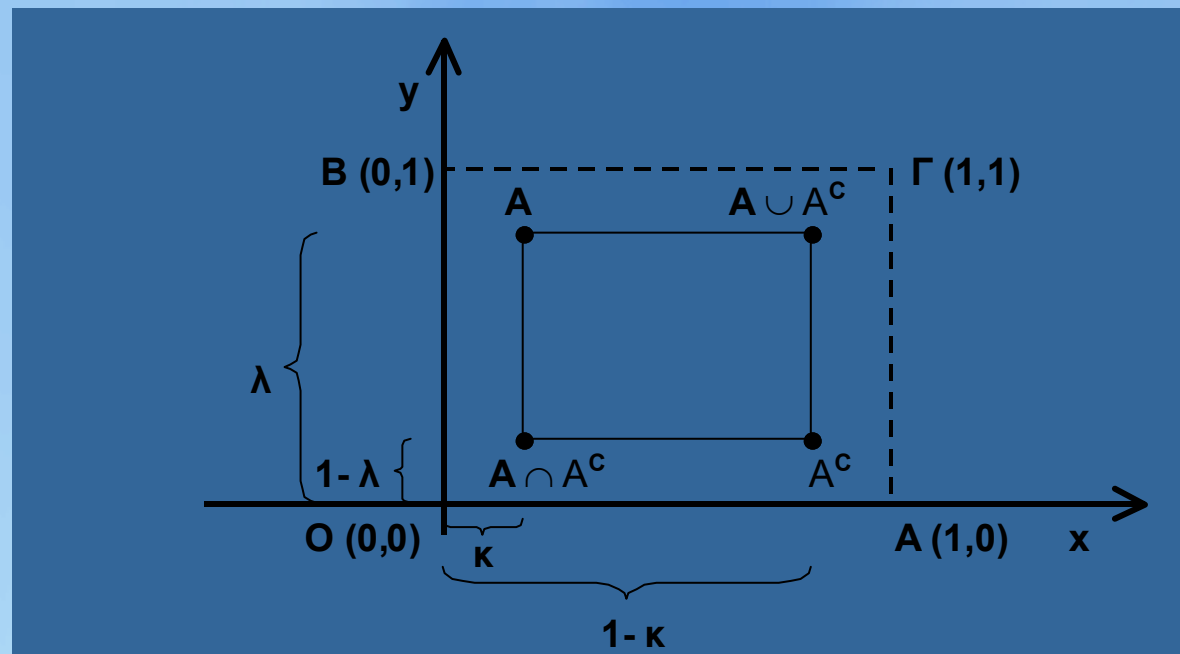
ii) $A \cap A^C$ είναι το ασαφές σύνολο $A \cap A^C: X \rightarrow [0, 1]$,
ώστε $(A \cap A^C)(\alpha) = \min(\kappa, 1-\kappa)$, $(A \cap A^C)(\beta) = \min(\lambda, 1-\lambda)$

iii) $A \cup A^C$ είναι το ασαφές σύνολο $A \cup A^C: X \rightarrow [0, 1]$,
ώστε $(A \cup A^C)(\alpha) = \max(\kappa, 1-\kappa)$, $(A \cup A^C)(\beta) = \max(\lambda, 1-\lambda)$

Υποθέτοντας ότι $\kappa < 0,5$ και $\lambda > 0,5$ τα σύνολα

$A, A^C, A \cap A^C, A \cup A^C$

παριστάνονται όπως παρακάτω στο τετράγωνο του Kosko



Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ ΓΙΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ

Έστω X και Y δύο σύνολα (όχι ασαφή) και μία συνάρτηση f από το X στο Y .

Έστω $\mathcal{F}(X)$ το σύνολο των ασαφών συνόλων από το X στο $[0,1]$ και $\mathcal{F}(Y)$ το σύνολο των ασαφών συνόλων από το Y στο $[0,1]$, δηλαδή:

$$f: X \rightarrow Y,$$

$$\text{αν } A \in \mathcal{F}(X) \text{ τότε } A: X \rightarrow [0,1]$$

$$\text{αν } B \in \mathcal{F}(Y) \text{ τότε } B: Y \rightarrow [0,1].$$

Από την αρχή της επέκτασης (extension principle)
ορίζονται δύο ασαφείς συναρτήσεις (χρησιμοποιούμε για
τον συμβολισμό τους το ίδιο σύμβολο f):

$f: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ έτσι ώστε για κάθε $A \in \mathcal{F}(X)$ να ισχύει
 $[f(A)](y) = \sup A(x)$ όπου x τέτοια ώστε $y=f(x)$.

$f^{-1}: \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ έτσι ώστε για κάθε $B \in \mathcal{F}(Y)$ να
ισχύει
 $[f^{-1}(B)](x) = B(f(x))$.

ΓΛΩΣΣΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (ΓΛΩΣΣΟΛΟΓΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΤΕΣ)

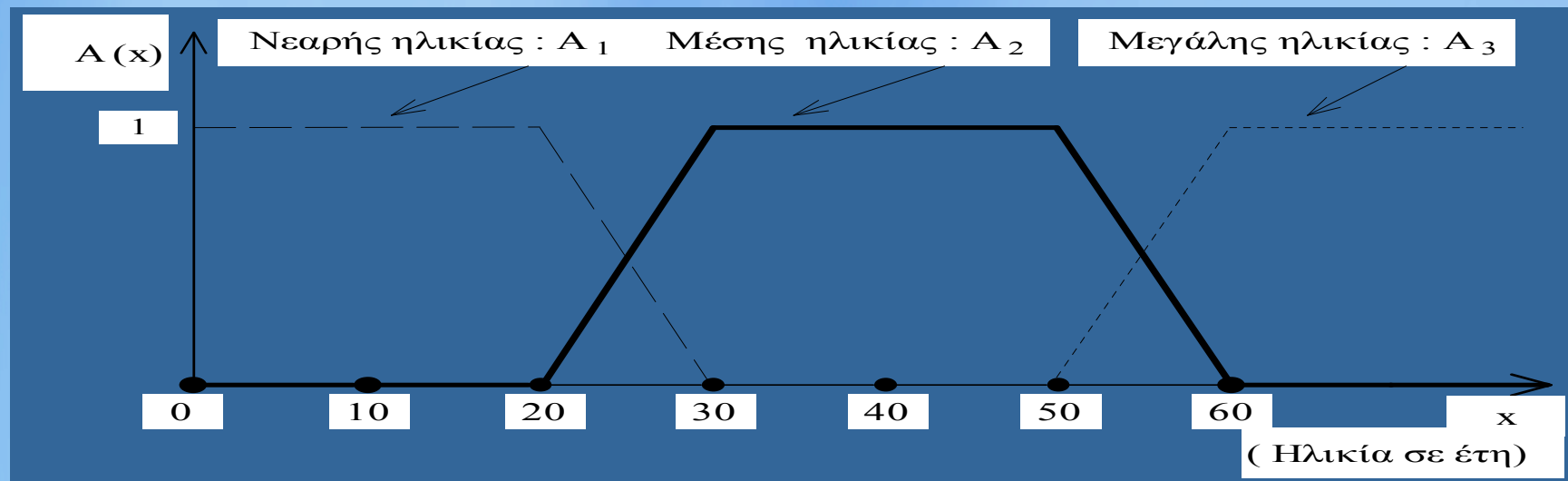
Η έννοια του ασαφούς αριθμού έχει μεγάλη σημασία στο να παραστήσουμε και να διαχειριστούμε τις γλωσσικές μεταβλητές (**linguistic variables**).

Έστω η λέξη «ηλικία» (αυτή η λέξη μπορεί να αναφέρεται σε άνθρωπο, κάποιο ζώο ή φυτό, σε ένα μικροοργανισμό, κάποιο πέτρωμα ή αστρικό σύστημα και λοιπά). Αυτή η λέξη είναι μια γλωσσική μεταβλητή και βασιζόμενοι με κάποιο συντακτικό γραμματικό κανόνα μπορούμε να δώσουμε σε αυτή κάποιες **γλωσσικές τιμές (linguistic terms)** και έστω ότι οι τιμές που δίνουμε είναι νεαρής ηλικίας, μέσης ηλικίας, μεγάλης ηλικίας.

Αν αυτές οι τιμές αποτελέσουν στοιχεία ενός συνόλου τότε προκύπτει ένα **σύνολο** $T = \{ \text{νεαρής ηλικίας, μέσης ηλικίας, μεγάλης ηλικίας} \}$. Θεωρώντας ότι η γλωσσική μεταβλητή «ηλικία» αφορά τους ανθρώπους παίρνουμε μια πραγματική μεταβλητή x με τιμές στο $[0, +\infty)$ που περιλαμβάνει όλες τις δυνατές ηλικίες των ανθρώπων.

Βάση ενός **σημασιολογικού κανόνα (semantic rule)** που τον συμβολίζουμε m μπορούμε να αποδώσουμε σε κάθε γλωσσική τιμή t του T την σημασία της ή το νόημά της που είναι ένας ασαφής αριθμός $m: T \rightarrow \mathcal{F}(X)$ ώστε για κάθε $t \rightarrow m(t): [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$.

Κάθε γλωσσική μεταβλητή είναι **πλήρως χαρακτηρισμένη από την πεντάδα (n, T, X, g, m)** όπου **n** είναι το όνομα της μεταβλητής, **T** είναι το σύνολο των γλωσσικών τιμών της, **X** είναι το σύνολο αναφοράς της αντίστοιχης πραγματικής με τη γλωσσική μεταβλητή, **g** είναι ο **συντακτικός γραμματικός κανόνας (syntactic rule)** από τον οποίο προκύπτουν οι γλωσσικές τιμές της μεταβλητής και **m** είναι ο σημασιολογικός κανόνας που αποδίδει σε κάθε γλωσσική τιμή ένα ασαφή αριθμό. Ως παράδειγμα μιας γλωσσικής μεταβλητής δίνεται η «ηλικία».



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΑΦΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Η ανάλυση παλινδρόμησης μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι θεωρία της πρόβλεψης ή της εκτίμησης της εξαρτημένης μεταβλητής y με τη βοήθεια των ανεξαρτήτων μεταβλητών x_i .

Η πρόβλεψη έχει μεγάλη πρακτική σημασία σε πολλούς τομείς της ανθρώπινης ζωής και των δραστηριοτήτων μας όπως στα οικονομικά μεγέθη (πρόβλεψη εθνικού εισοδήματος με βάση της σχεδιαζόμενες επενδύσεις), στη βιομηχανία (επίδραση διαφόρων παραγόντων σε μια ιδιότητα του παραγομένου προϊόντος), στη μετεωρολογία (από διάφορες ατμοσφαιρικές μετρήσεις γίνεται η πρόβλεψη του καιρού) κλπ.

Με τα γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης επιδιώκουμε με βάση μετρήσεις που έχουμε πραγματοποιήσει να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n, c$ ώστε από τη γραμμική σχέση:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n + c = y$$

να εκτιμήσουμε (προβλέψουμε) το αποτέλεσμα που θα έχει μία n -άδα δεδομένων.

Αν τη θέση των προσδιοριστέων πραγματικών αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n, c$ πάρουν ασαφείς αριθμοί $A_1, A_2, \dots, A_n, A_0$ τότε προκύπτει ένα μοντέλο ασαφούς γραμμικής παλινδρόμησης της μορφής:

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n + A_0 = Y$$

ΑΣΑΦΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε αρχικά το 1947 από τους G.B.Dantzig και Marshall Wood της Αεροπορίας των Ηνωμένων Πολιτειών όταν κλήθηκαν να εφαρμόσουν τα Μαθηματικά και συναφείς μεθόδους στον στρατιωτικό προγραμματισμό και στα προβλήματα σχεδιασμού.

Ο Dantzig οδηγήθηκε στην πρόταση: οι αμοιβαίες σχέσεις μεταξύ δραστηριοτήτων ενός οργανισμού θεωρούνται μοντέλο τύπου γραμμικού προγραμματισμού και η ελαχιστοποίηση της γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης βελτιστοποιεί το πρόβλημα. Η αεροπορία οργάνωσε ερευνητική ομάδα με τον τίτλο SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs) για την μελέτη προβλημάτων προυπολογισμού συμβάλλοντας με αυτό τον τρόπο στην θεωρητική ανάπτυξη και εφαρμογή του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού.

Οι πρώτες εφαρμογές των μεθόδων του γραμμικού προγραμματισμού μπορούν να τοποθετηθούν σε τρεις κύριες κατηγορίες: στρατιωτικές εφαρμογές, οικονομικές εφαρμογές και προβλήματα παιγνίων.

Οι περιοχές των εφαρμογών έχουν επεκταθεί και αναπτυχθεί σε πολλά πεδία με ιδιαίτερη έμφαση στον βιομηχανικό τομέα. Μελετώνται προβλήματα κατανομής πόρων , μέσων και αγαθών τα οποία μπορεί να είναι εργαζόμενοι, υλικά, μηχανές σε διάφορες εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες. Υπάρχουν περιορισμοί στα διατιθέμενα αγαθά και στις στάθμες των δραστηριοτήτων, όμως αυτοί οι περιορισμοί δεν είναι τόσοι και τέτοιοι ώστε να προκαθορίζουν ένα μόνο τρόπο ενέργειας, αλλά αφήνουν περιθώρια για περισσότερες από μία δράσεις (λύσεις) και προσδιορίζεται εκείνη που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί ένα προκαθορισμένο κριτήριο επιλογής (αντικειμενική συνάρτηση).

Οι εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού επεκτείνονται στις γεωργικές εφαρμογές (αγροτική οικονομία, διαχείριση,ελαχιστοποίηση κόστους διατροφής), σε προβλήματα εργοδοσίας, βιομηχανικές εφαρμογές(παραγωγή και έλεγχος αποθεμάτων, ζήτηση προϊόντων κατά περιοχή και τα μεταφορικά μέσα από τις αποθήκες στους τόπους ζήτησης), εμπορικές αερογραμμές, τηλεπικοινωνίες, συγκοινωνίες, οικονομικές αναλύσεις, καταμερισμός εργασίας, τροχαία κίνηση(σηματοδότες), το πρόβλημα του ταξιδεύοντος εμπόρου(έυρεση του πιο σύντομου δρομολογίου για τον έμπορο που επισκέπτεται πόλεις), λειτουργία υδατοφρακτών, προβλήματα μίξεως και άλλα.

Το μαθηματικό μοντέλο του γενικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι το παρακάτω:

Να προσδιοριστού οι τιμές των μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_n$ που μεγιστοποιούν (ή ελαχιστοποιούν) την γραμμική συνάρτηση

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq (= , \geq) b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq (= , \geq) b_2$$

.

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq (= , \geq) b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

όπου a_{ij}, b_i, c_j ($i=1,2,\dots,m$ και $j=1,2,\dots,n$) είναι δεδομένες σταθερές.

Έχουμε τους παρακάτω τύπους προβλημάτων
ασαφούς γραμμικού προγραμματισμού:

1) Μεγιστοποίηση $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$

υπό τους περιορισμούς:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq (= , \geq) b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq (= , \geq) b_2$$

•

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq (= , \geq) b_m$$

Όπου οι ανισώσεις εκφράζονται από **συναρτήσεις συμμετοχής**

και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

2) γραμμικός προγραμματισμός με ασαφείς αντικειμενικούς συντελεστές

Δηλαδή c_j ($j=1,2,\dots,n$) είναι **ασαφείς αριθμοί**

3) γραμμικός προγραμματισμός με ασαφείς
περιοριστικούς συντελεστές.
Δηλαδή οι συντελεστές a_{ij} είναι ασαφείς αριθμοί

Με συνδυασμό αυτών των τύπων προβλημάτων
προκύπτουν περισσότεροι τύποι προβλημάτων
ασαφούς γραμμικού προγραμματισμού .

ΕΛΕΓΚΤΕΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Η μεθοδολογία των «ελεγκτών ασαφούς λογικής» ή αλλιώς «ασαφών συστημάτων», αναπτύχθηκε κυρίως για τις ανάγκες της βιομηχανικής μηχανικής (αυτόματος βιομηχανικός έλεγχος), έχει βρει όμως πολλά πεδία εφαρμογών (ανάλυση δεδομένων, ταξινόμηση αποφάσεων κ.λ.π.).

Η λογική συνεπαγωγή «εάν...τότε» του προτασιακού λογισμού έχει επεκταθεί στην ασαφή λογική με αποτέλεσμα τις διάφορες μορφές ασαφούς συμπερασμού (ασαφείς συνεπαγωγές).

Η κλασσική μεθοδολογία ελέγχου (που αναπτύχθηκε κυρίως για μηχανικούς), είναι βασισμένη σε μαθηματικά μοντέλα του αντικειμένου που θέλουμε να ελέγξουμε. Τα μαθηματικά μοντέλα απλοποιούν και ιδανικεύουν περιπτώσεις, σε φυσικές και ανθρώπινες δραστηριότητες, χρησιμοποιώντας διάφορους τύπους από εξισώσεις, οι οποίες πρέπει να λυθούν.

Πόσο ακριβή όμως είναι τα μαθηματικά μοντέλα όταν περιγράφουν τη πραγματικότητα;

Σε πολύπλοκες περιπτώσεις η δομή τέτοιων μοντέλων ίσως να είναι και αδύνατη. Αυτό συμβαίνει συχνά π.χ. σε μοντέλα που έχουν σχέση με την Οικονομία και την Διοίκηση Επιχειρήσεων. Σ' αυτές τις περιπτώσεις τα μοντέλα περιέχουν μεγάλο αριθμό συντελεστών (δηλαδή αλληλεπιδρώντες παράγοντες).

Ο σχεδιασμός ενός ελεγκτή με τον κλασσικό τρόπο ακολουθεί τα εξής βήματα:

α) Διατυπώνουμε ένα αλγεβρικό μαθηματικό μοντέλο του συστήματος το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε και

β) Υπολογίζουμε ένα αλγεβρικό μαθηματικό μοντέλο του ελεγκτή έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι δοθείσες προδιαγραφές.

Εννοείται ότι οι τιμές που λαμβάνουν οι μεταβλητές εισόδου ή εξόδου είναι πραγματικοί αριθμοί.

Στα ασαφή συστήματα η διαφορά είναι ότι: οι τιμές που παίρνει μια μεταβλητή εισόδου ή εξόδου είναι ασαφή σύνολα, τα οποία θεωρούνται «λεκτικές» τιμές. Έτσι μια μεταβλητή εισόδου ή εξόδου λέγεται και «λεκτική» μεταβλητή. Η λειτουργία του συστήματος δεν περιγράφεται με αλγεβρικό αλλά με λεκτικό τρόπο. Τα μοντέλα ασαφούς λογικής προτιμώνται για την περιγραφή πολύπλοκων συστημάτων, είναι πολύ αποτελεσματικά όταν δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια και επίσης όταν ο έλεγχος αντικειμένων έχει μεταβλητές προσιτές όσον αφορά τη μέτρηση ή την εκτίμηση.

Ένα Ασαφές Σύστημα

Θα περιγράψουμε ένα ασαφές σύστημα με δύο εισόδους (EIS1, EIS2) και μια έξοδο (EX). Η ίδια τεχνική μπορεί να επεκταθεί σε προβλήματα με περισσότερες εισόδους και εξόδους. Επίσης μπορεί να εφαρμοσθεί και στη περίπτωση που το πρόβλημα έχει μια μόνο είσοδο και μια έξοδο.



(Στο μεσαίο πλαίσιο δείχνεται το όνομα και ο τύπος του ασαφούς συστήματος που χρησιμοποιήθηκε).

Όπως έχουμε αναφέρει για τις εισόδους και εξόδους χρησιμοποιούμε «λεκτικές» μεταβλητές. Αυτές μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη χρήση συνόλων.

Έστω A , B τα σύνολα που χρησιμοποιούμε για τις δύο εισόδους του συστήματος μας και C το σύνολο για την έξοδο.

Τα σύνολα A, B, C περιέχουν, το καθένα, καθορισμένο αριθμό από όρους A_i, B_j, C_k αντίστοιχα, όπου οι όροι A_i, B_j, C_k είναι ασαφή σύνολα που ορίζονται ως εξής :

$$A_i = \{ (x, \mu_{A_i}(x)) / x \in A_i \subset U_1 \} \quad i = 1, \dots, n$$

$$B_j = \{ (x, \mu_{B_j}(x)) / x \in B_j \subset U_2 \} \quad j = 1, \dots, m$$

$$C_k = \{ (x, \mu_{C_k}(x)) / x \in C_k \subset U_3 \} \quad k = 1, \dots, l$$

Για τον σχεδιασμό αυτών των ασαφών συνόλων απαιτείται :

- α) Προσδιορισμός των γενικευμένων συνόλων U_1, U_2, U_3 .
- β) Επιλογή των σχημάτων για τις συναρτήσεις βαθμού συμμετοχής των A_i, B_j, C_k (μπορούν να χρησιμοποιηθούν τρίγωνα, τραπέζια, Gaussian κ.ά.).
- γ) Καθορισμός του αριθμού των όρων $n, m, \dots$. Συνήθως ο αριθμός τους είναι από 2 έως 7.
- δ) Καθορισμός των παραμέτρων που ορίζουν τα ασαφή σύνολα A_i, B_j, C_k .

Ο καθορισμός των παραπάνω τιμών έχει σχέση με το πρόβλημά μας και εξαρτάται από μετρήσεις, απόψεις εμπειρογνομόνων, κ.ά.

Η «λειτουργία» του ασαφούς συστήματος στηρίζεται στο πλαίσιο:

‘If ... and ... then – κανόνες’

Οι κανόνες ονομάζονται συμπερασματικοί κανόνες ή κανόνες ελέγχου και το πλήθος τους είναι συνήθως $n \cdot m$, όπου n και m είναι το πλήθος των όρων των λεκτικών μεταβλητών A και B σε κάθε είσοδο.

Η έννοια του ‘if...and...then – κανόνες’ είναι: «εάν $x \in A_i$ και $y \in B_j$ τότε $z \in C_k$ », δηλαδή είναι μια συνεπαγωγή.

Στη θέση του «if ... then» επιλέγουμε μια ασαφή συνεπαγωγή, π.χ. μια συνεπαγωγή που χρησιμοποιείται είναι η ασαφής συνεπαγωγή Mamdani (ασαφή συστήματα τύπου Mamdani).

Σ' αυτήν ο κανόνας «if $x \in A_i$ and $y \in B_j$ then $z \in C_k$ » διατυπώνεται ως εξής: $(x \in A_i) \text{ και } (y \in B_j) \text{ και } (z \in C_k) = \min(.,.)$ όπου $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$, $k=1, \dots, l$ και $(x,y,z) \in A \times B \times C$.

Οι κανόνες έχουν ως συμπέρασμα τους όρους της εξόδου C.

Υπολογισμός της Εξόδου Ασαφούς Συστήματος

Για να υπολογίσουμε την αριθμητική έξοδο ενός ασαφούς συστήματος ακολουθούμε τα εξής βήματα:

αριθμητικές είσοδοι

ασαφοποίηση των αριθμητικών εισόδων

εφαρμογή ασαφών τελεστών

ασαφής συνεπαγωγή

συνάθροιση των εξόδων

αποασαφοποίηση και αριθμητικές έξοδοι

Πιο αναλυτικά έχουμε:

α) Ασαφοποίηση των αριθμητικών εισόδων

Σε πρώτη φάση έχουμε την ασαφοποίηση των αριθμητικών εισόδων. Για κάθε πραγματικό αριθμό που εισάγουμε σε κάθε Είσοδο υπολογίζεται ο βαθμός συμμετοχής στο αντίστοιχο ασαφές σύνολο αιτίου του κάθε κανόνα.

β) Εφαρμογή ασαφών τελεστών

Εάν το τμήμα *if* του κανόνα είναι η σύζευξη περισσότερων του ενός αιτίων, τότε εφαρμόζεται ένας ασαφής τελεστής, *t-norm* (π.χ. ο ασαφής τελεστής *min*) με σκοπό να υπολογιστεί ο αριθμός που θα εκφράσει το συνολικό βαθμό ικανοποίησης του κανόνα.

γ) Ασαφής συνεπαγωγή

Η διαδικασία της ασαφούς συνεπαγωγής πραγματοποιείται παράλληλα για όλους τους κανόνες και το αποτέλεσμα για κάθε κανόνα είναι ένα ασαφές σύνολο.

δ) Συνάθροιση των εξόδων

Η έξοδος του κάθε κανόνα είναι ένα ασαφές σύνολο. Η διαδικασία κατά την οποία τα ασαφή αυτά σύνολα των εξόδων συνδυάζονται σε ένα ασαφές σύνολο καλείται συνάθροιση.

Η συνάθροιση των εξόδων μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους, π.χ. με τη μέθοδο του μεγίστου (max), του αθροίσματος (sum), του αλγεβρικού αθροίσματος (probor), κ.ά.

ε) Αποασαφοποίηση

Αποασαφοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία στο ασαφές σύνολο που προέκυψε, από την συνάθροιση των ασαφών συνόλων των εξόδων αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός.

Για τον υπολογισμό αυτού του πραγματικού αριθμού υπάρχουν αρκετοί τρόποι-μέθοδοι αποασαφοποίησης.

Μερικές από αυτές είναι οι μέθοδοι:

- i) του κέντρου βάρους
- ii) του μεγαλύτερου από τα μέγιστα
- iii) του μικρότερου από τα μέγιστα
- iv) του μέσου των μεγίστων κ.ά.